

Remarques importantes :

- L'épreuve est composée d'une seule page.
- Les réponses doivent être mentionnées sur la fiche de réponse donnée au candidat.
- Le candidat doit se concentrer sur le sujet d'examen sans poser aucune question concernant son contenu.

Electricité (QCM : Marquez la bonne réponse sur la fiche de réponse)

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Dans le schéma de la Figure 1, on utilise un supercondensateur de capacité très grande notée  $C$  et une source de courant idéale qui délivre une intensité constante  $I = 100 \text{ A}$ . Le supercondensateur est initialement déchargé ( $u_C(t=0) = 0 \text{ V}$ ). A l'instant  $t = 0$ , on positionne l'interrupteur  $K$  en position 0. On charge alors le condensateur à courant constant. Un système d'enregistrement permet d'obtenir la mesure suivante : à  $t = t_0 = 52 \text{ s}$ ,  $u_C = U_0 = 2 \text{ V}$ .

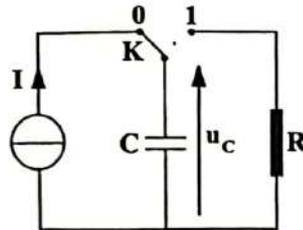


Figure 1

à  $t = t_0 = 52 \text{ s}$ ,  $u_C = U_0 = 2 \text{ V}$ .

1. La capacité de ce condensateur vaut en Farads ( $F$ ) :
2. L'énergie emmagasinée  $\xi_c$  par ce condensateur à l'instant  $t_0$  vaut en  $\text{kJ}$  :

A l'instant  $t_0$ , on bascule l'interrupteur  $K$  à la position 1. Ce condensateur se déchargera à travers une résistance  $R = 9 \Omega$  jusqu'à l'instant  $t_1$  où  $u_C(t_1) = U_1 = 1,65 \text{ V}$ . On pose :  $\tau = RC$ .

3. Durant la décharge de ce condensateur, l'expression de la tension  $u_C(t)$  est égale à :
4. La constante de temps du circuit  $\tau$  a pour valeur en heures :
5. La valeur de l'instant  $t_1$  en secondes est d'environ :
6. L'énergie, notée  $\xi_R$ , dissipée par effet Joule dans la résistance  $R$  pendant l'intervalle de temps  $[t_0, t_1]$  a pour valeur en  $\text{kJ}$  :

Partie B

Un supercondensateur est modélisé par l'association en série d'un conducteur ohmique de résistance  $R_S$  et un condensateur de capacité  $C_S$ . On cherche à identifier de manière expérimentale les paramètres  $R_S$  et  $C_S$  de ce supercondensateur. Pour cela, à l'instant  $t = 0$ , on alimente le supercondensateur, initialement chargé sous la tension  $u_0 = 1,55 \text{ V}$ , par une source de courant d'intensité constante  $I = 100 \text{ A}$  pendant la durée  $\Delta t = 10 \text{ s}$  (Figure 2.a). On obtient le relevé de la tension  $u_C = f(t)$  illustré dans la Figure 2.b (On donne :  $u_1 = \frac{5}{3} \text{ V}$ ).

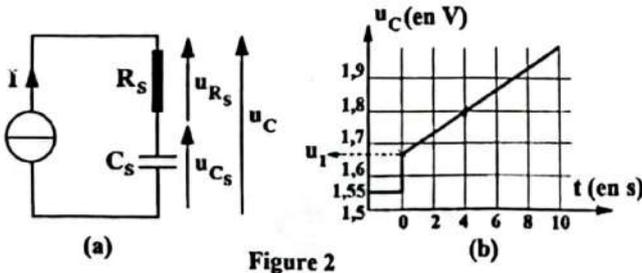


Figure 2

7. La tension  $u_C(t)$  vérifie l'équation différentielle suivante :
8. En tenant compte des conditions initiales, l'expression de la tension  $u_C(t)$  en fonction du temps est :
9. L'expression de la résistance  $R_S$  est :
10. La valeur de la résistance  $R_S$  en  $\text{m}\Omega$  est environ :

11. La capacité  $C_S$  de ce supercondensateur en  $F$  vaut :

Partie C

On réalise un circuit électrique comportant un générateur de tension continue  $E = 50 \text{ V}$ , un interrupteur de courant  $K$ , trois condensateurs de même capacité  $C$ , une résistance  $R$  et une bobine d'inductance  $L$  et de résistance interne négligeable (Figure 3). A l'instant  $t = 0 \text{ s}$ , on positionne l'interrupteur  $K$  en position 0. On suppose que les condensateurs sont initialement chargés et les tensions à leurs bornes vérifient la relation  $u_1(t=0) = u_2(t=0) = 5 \text{ V}$ . A l'instant  $t = 5 \text{ ms}$ , un système de mesure permet de relever les grandeurs suivantes :  $U(5 \text{ ms}) = 35,28 \text{ V}$  et  $i_1(5 \text{ ms}) = 736 \text{ mA}$ .

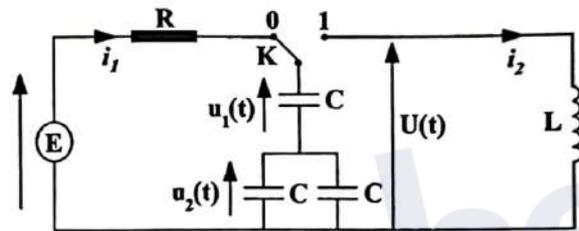


Figure 3

12. La capacité équivalente de l'association des trois condensateurs est :
13. L'équation différentielle vérifiée par  $U(t)$  s'écrit sous la forme :  $\alpha E = RC \frac{dU(t)}{dt} + \beta U(t)$ . Le couple  $(\alpha, \beta)$  a pour valeur :
14. La solution de l'équation différentielle précédente s'exprime comme suit :  $U(t) = A - B e^{-\frac{t}{\tau}}$  où  $\tau$  est la constante de temps du circuit. Le couple  $(A, B)$  a pour valeur en Volts :
15. La valeur de la résistance  $R$  en  $\Omega$  est :
16. La valeur de la capacité  $C$  en  $\mu\text{F}$  est :
17. En tenant compte des conditions initiales, la tension  $u_1(t)$  s'exprime en fonction de  $U(t)$  comme suit :  $u_1(t) = \lambda (U(t) + \gamma)$ . Le couple  $(\lambda, \gamma)$  a pour valeur :
18. L'expression de la tension  $u_2(t)$  en fonction de  $U(t)$  est égale à :
19. Au bout d'un temps très supérieur à la constante de temps  $\tau$ , l'énergie emmagasinée par le condensateur  $C$  soumis à la tension  $u_1(t)$  vaut en  $\text{mJ}$  :
20. Le courant  $i_1(t)$  s'exprime comme suit :  $i_1(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ . Le couple  $(I_0, \tau)$  a pour expression :
21. Le couple  $(I_0, \tau)$  a pour valeur :

Après un temps très long, on bascule l'interrupteur  $K$  de la position 0 à la position 1 à un instant considéré comme origine du temps.

22. La tension  $U(t)$  obéit à l'équation différentielle suivante :  $\frac{d^2U(t)}{dt^2} + \mu U(t) = 0$ . L'expression de  $\mu$  est :
23. Un système d'enregistrement permet de déterminer l'expression du courant établi dans le circuit comme suit :  $i_2(t) = 2,5 \sin\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)$  en  $\text{A}$  où  $T_0$  est la période propre des oscillations dans le circuit.

La valeur de l'inductance  $L$  en  $\text{mH}$  est :

24. La période  $T_0$  des oscillations qui prennent naissance dans le circuit est en secondes :
25. L'énergie totale  $\xi_i$  du circuit en  $\text{mJ}$  est :

## Mécanique

On suppose que l'accélération de la pesanteur est constante et égale à  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , dirigée vers le bas.

**Les parties A, B, C et D sont Indépendantes.**

Rédaction : On écrit seulement le résultat final sur la fiche de réponse.

### Partie A

Un corps ponctuel  $M$  de masse  $m = 0,2 \text{ kg}$  est lancé, à  $t = 0$ , vers le haut depuis le point  $O$  (pris comme origine d'un axe  $(Oz)$  orienté vers le haut) avec une vitesse initiale verticale de norme  $V_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$  et arrive jusqu'à un point  $A$  puis redescend. On néglige les frottements. **Donner les valeurs numériques de :**

26. La hauteur de montée  $h = OA$  (en  $m$ ).
27. La norme  $V'_0$  (en  $\text{m.s}^{-1}$ ) de la vitesse de  $M$  quand il repasse par le point  $O$ .
28. La durée  $\Delta t$  (en  $s$ ) d'allée retour sur le trajet  $(OAO)$ .

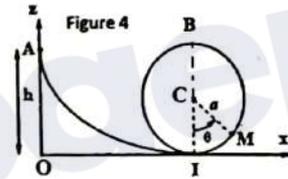
On reprend l'énoncé précédent et on suppose qu'en plus du poids, la masse ponctuelle subit une force de frottement verticale qui s'oppose au vecteur vitesse et d'intensité constante :  $f = 0,5 \text{ N}$ . **Donner :**

29. La valeur numérique de la hauteur de montée  $h = OA$  (en  $m$ ).
30. L'expression de la norme  $V'_0$  de la vitesse de  $M$  quand il repasse par le point  $O$ , en fonction  $m, g, f$  et  $V_0$ .
31. La valeur numérique de la durée  $\Delta t$  (en  $s$ ) d'allée sur le trajet  $(OA)$ .

### Partie B

Un point matériel  $M$  se déplace sans frottements à l'intérieur d'une gouttière terminée par un cercle de rayon  $a$ . Il est lâché en  $A$ , d'une hauteur  $h$ , sans vitesse initiale (Figure 4).

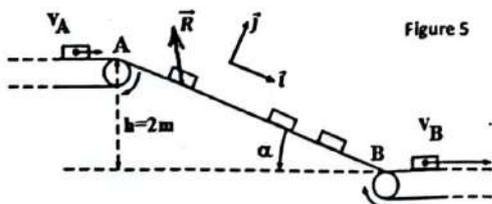
32. Exprimer la norme  $V_M$  de la vitesse du point  $M$  lorsqu'il est à l'intérieur du cercle en fonction de  $a, h, g$  et  $\theta$ .
33. Déterminer l'intensité  $R$  de la réaction exercée par le support circulaire sur le point matériel en fonction de  $m, a, h, g$  et  $\theta$ .
34. De quelle hauteur  $h_{\min}$  (exprimée en fonction de  $a$ ) doit on lâcher le point matériel  $M$  sans vitesse initiale en  $A$  pour qu'il arrive jusqu'au point  $B$  le plus haut du cercle ( $\theta = \pi$ ) ? (Indication : l'intensité  $R$  doit rester positive pour maintenir le contact entre  $M$  et le cercle).
35. Pour  $h = h_{\min}$ , donner l'expression de la norme  $V_B$  de la vitesse en  $B$  ( $\theta = \pi$ ) en fonction de  $a$  et  $g$ .
36. Pour  $h = h_{\min}$ , donner, en fonction de  $m$  et  $g$ , l'expression de l'intensité  $R$  de la réaction du support au point  $I$  d'entrée du cercle ( $\theta = 0$ ).



QCM : Marquez la bonne réponse sur la fiche de réponse.

### Partie C

Étudions un convoyeur à colis présent dans un centre de tri postal de la figure 5. Les colis sont déchargés par un tapis roulant à la vitesse  $V_A = 0,2 \text{ m.s}^{-1}$ , puis glissent ensuite sur un plan incliné d'angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Ils sont ensuite pris en charge au niveau du point  $B$  par un nouveau tapis roulant qui avance à la vitesse  $V_B = 0,5 \text{ m.s}^{-1}$ .



On se propose de déterminer l'angle  $\alpha$  pour que le convoyeur fonctionne correctement, c'est-à-dire pour que les colis arrivent en  $B$  avec la vitesse du deuxième tapis roulant.

En plus de son poids, le colis de masse  $m$  subit par le plan incliné une force  $\vec{R} = -T\vec{i} + N\vec{j}$  avec  $T = fN$  où  $f = 0,4$  désigne le coefficient de frottement. On note  $\vec{\gamma} = \gamma\vec{i}$  l'accélération d'un colis sur le trajet  $AB$ .

37. L'expression de  $\gamma$  est :

38. Le travail de la réaction  $\vec{R}$  sur le trajet  $AB$  est :

39. L'expression de  $\tan(\alpha)$  est :

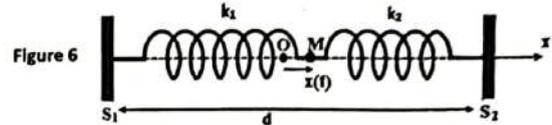
40. La valeur numérique de l'angle  $\alpha$  est environ :

### Partie D

Les sous parties D.1 et D.2 sont Indépendantes.

D.1) Un point matériel  $M$  de masse  $m$  est susceptible de se déplacer sans frottements sur un axe horizontal. Il est soumis à l'action de 2 ressorts de même longueur à vide  $l_0 = 20 \text{ cm}$  et de constantes de raideur différentes  $k_1$  et  $k_2$ . Les autres extrémités des ressorts sont attachées à deux supports fixes  $(S_1)$  et  $(S_2)$  distants de  $d$  (voir Figure 6).

On donne :  $m = 4 \text{ kg}$  ;  $k_1 = 100 \text{ N/m}$  ;  $k_2 = 300 \text{ N/m}$  et  $d = 60 \text{ cm}$ . On choisit la position d'équilibre de  $M$  comme origine  $O$  de l'axe  $(Ox)$ .



41. Les longueurs  $(l_{e1}, l_{e2})$  des 2 ressorts à l'équilibre sont (en  $\text{cm}$ ) :

On écarte  $M$  de sa position d'équilibre jusqu'à la position d'abscisse  $x_m > 0$  puis on le lâche à  $t = 0$  sans vitesse initiale. A tout instant  $t$ , le point matériel  $M$  est repéré par son abscisse  $x(t)$  (figure 6). On choisit la position du repos de chaque ressort (ressort n'est ni allongé ni comprimé) comme origine de l'énergie potentielle élastique et on pose  $E_0 = \frac{1}{2}k_1(l_{e1} - l_0)^2$ .

42. L'énergie potentielle élastique totale du point matériel  $M$  pour une position d'abscisse  $x(t)$  s'écrit :  $E_{pe} = \frac{1}{2}\alpha x^2 + (1 + \beta)E_0$ . Le couple  $(\alpha, \beta)$  est :
43. L'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'abscisse  $x(t)$  de  $M$  sur  $(Ox)$  s'écrit :  $m\ddot{x} + \lambda x = 0$ . Le coefficient  $\lambda$  est égal à :
44. Sachant que la norme de la vitesse de  $M$  quand il passe par  $O$  est  $V_0$ , l'élongation maximale  $x_m$  de  $x(t)$  s'écrit :  $x_m = \mu V_0$ . La valeur numérique de  $\mu$  est :

D.2) On considère le système illustré dans la Figure 7 où le point matériel  $M$  de masse  $m$  est astreint à se déplacer sans frottements le long d'un demi-cercle de rayon  $a$ . Le point  $M$  est attaché à un ressort  $(k, l_0)$  dont l'autre extrémité est fixée en  $O'$  ( $OO' = a$ ). Le point  $M$  est repéré par l'angle  $\theta = (\text{Ox}, \text{OM})$ .

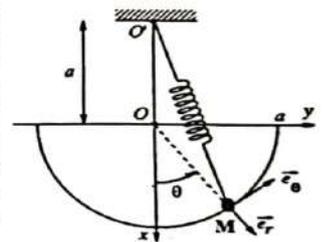


Figure 7

Pour une position  $\theta$  de  $M$ , on admet que :

- la longueur du ressort est  $l = O'M = 2a \cos(\frac{\theta}{2})$
- L'angle  $\text{OM}O' = \frac{\theta}{2}$

Pour simplifier le problème, on pose :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} ; \frac{g}{a} = \frac{\omega^2}{2} \text{ et } \frac{l_0}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

45. L'accélération du point matériel  $M$  s'écrit :  $\vec{a}(M) = c\theta^2\vec{e}_r + d\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$ . Le couple  $(c, d)$  est :
46. L'équation différentielle vérifiée par  $\theta(t)$  s'écrit :  $\ddot{\theta} = \omega^2 \left( \alpha \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \beta \right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ . Le couple  $(\alpha, \beta)$  est :
47. On s'intéresse au cas des petits angles ( $\theta \ll 1$ ). On rappelle qu'en cas de petits angles  $u \ll 1$  on a :  $\sin(u) \approx u$  et  $\cos(u) \approx 1$ . L'équation différentielle précédente se simplifie en :  $\ddot{\theta} = \eta\omega^2\theta$ . Le coefficient  $\eta$  est égal à :
48. Peut-on envisager, en cas de petits angles, une solution sinusoïdale  $\theta(t)$  autour de la position  $(\theta = 0)$  ?